

Title	An ergodic theorem of Birkhoff - Khintchine's type II
Author(s)	吉田, 耕作
Citation	全国紙上数学談話会. 195 p.100-p.107
Issue Date	1940-03-21
oaire:version	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74779
rights	
Note	

Osaka University Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

Osaka University

849. An ergodic theorem of Birkhoff-Khintchine's type II

吉田 耕作(阪大)

前談話(844) = ハ誤リモアリ¹⁾, 急イテ書イタタメニ色々略シタ所モアリマシタ。又前ヨリモ所々良クナル様デスカラ今一度始カラ述ベテミマセウ。

定理 Banach 空間 (L^p) , $(L^p) \rightarrow$ 線型寫像 T が²⁾

$$(1) \|T^n\| \leq \text{常數 } C \quad (n=1, 2, \dots)$$

$$(2) \text{ 全テ } f \in (L^p) \text{ ニ對シ, 殆トド到ル所}$$

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n f^{(m)}(t) \right| < \infty,$$

$$\text{但シ } f^{(m)} = T^m \cdot f \quad (m=1, 2, \dots), \text{ テ満足}$$

スルトスル。

コノトキ若シ或ル $g \in (L^p)$ が

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} g^{(n)}(t) = 0$$

almost everywhere.

1) **定理** = 於テ必要條件ト云ツタノハ充分條件ノ誤リデス。從ツテ

証明 / 初ノ必要ハ明カデアラルカラハ餘計デシタ。

2) $f(t) \in (L^p)$ / norm ハ $\|f\| = \left(\int_0^1 |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}$ デ定義サレル。

$$(4) \quad \left\{ \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n g^{(m)} \right\} \text{ が } (L^p) \text{ の点 } g^* = \underline{\text{弱収斂}} \text{ ス} \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{ル部分列ヲ含ム。} \end{array} \right.$$

ヲ満足スルトラバ

$$(5) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n g^{(m)}(t) = g^*(t)$$

almost everywhere

$$(6) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| g^* - \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n g^{(m)} \right\| = 0$$

$$\boxed{\text{注意}} \quad \text{全テノ } f \in (L^p) = \text{對シテ } \left\| \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n f^{(m)} \right\| \leq C \cdot \|f\| \\ (n=1, 2, \dots)$$

が (1) から出ルカラ, $p=1$ のトキハ (4) の $\left\{ \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n g^{(m)} \right\}$ が
equi-integrable ナ部分列ヲ含ムコトト同等デアル。
又 $p>1$ トラバ (4) ハ餘計ト假定デアル。何者 (L^p) ハ $p>1$
ノトキ locally weakly compact ナカラ

定理 2 T が (1), (2), 他 =

$$(1)' \quad \|T^n\|_M \leq \text{常数 } C' \quad (n=1, 2, \dots)^{1)}$$

ヲ満足スルトラバ, 全テノ $g \in (L^p) = \text{對シ } (3), (4), (5), (6)$
が全テ成立スル。

定理 3 若シモ

脚註 1) 次頁へ

(n) 各 $g \in (L^p) =$ 對シ $|g^{(m)}(t)| \leq G(t)$ ($m=1, 2, \dots$) ナル如キ $G \in (L^p)$ 存在ス,

ヲ假定スレバ, 全テノ $g \in (L^p) =$ 對シ (3), (4), (5), (6) が成立ツ. 証明ノ爲ニ次ノ Lemma が必要ナル

Lemma T が (2) ヲ満足スルベシ. 若シ各 $f \in (L^p)$ $=$ 對シ

$$\tilde{f}(t) = \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n f^{(m)}(t)} - \underline{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n f^{(m)}(t)}$$

ヲ定義スルトキ (L^p) カラ $type(F)$ ノ空間 $(S)^{2)}$ へノ寫像 (必ズシモ線型カドヲカラヌ) $\tilde{T}: \tilde{f} = \tilde{T} \cdot f$ ハ連
続ナル. 即チ $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\| = 0$ カラ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\tilde{T} \cdot f_n - \tilde{T} \cdot f\|_S = 0 \text{ ヲ得ル.}$$

証明 コノ Lemma ハ Banach-Saks ノ定理トシテ知ラレテアルモノノ特別ナ場合ナル. 併シ Banach ノ書物等ニハ載ツテ居タイマシデアルシ, 本談話ノ方法ノ

前頁脚註

- 1) (M) ハ essentially bounded + measurable function ノ作ル Banach 空間. (M) デノ norm ハ $\|f\|_M = \text{essential sup}_t |f(t)|$. 從ツテ (1)' ハ特ニ T が $(M) \rightarrow (M)$ へノ線型寫像ニナツテルコトヲ要求シテル訳デアル.
- 2) 殆ド到ル所有限 + 可測函数 ノ作ル空間. (S) デノ norm ハ $\|f\|_S = \int_0^1 \frac{|f(t)|}{1+|f(t)|} dt$ デ定義サレル. norm $\|\cdot\|_S$ デノ收斂ハ漸近收斂ト同値デアル.

key デアルカラ S. Mazur ト W. Orlicz¹⁾ = 従ッテ
proof sketch ヲ書イテオキマス。

$$f_n = \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n f^{(m)}, \quad f'_n(t) = \sup_{m \leq n} |f_m(t)|,$$

$f'(t) = \sup_m |f_m(t)|$ ト置キ (L^p) カラ (S) ハノ寫像
 $\nabla_n \cdot f = f'_n, \nabla \cdot f = f'$ ヲ考ヘル。各 ∇_n ハ連続 且ツ
全テ 点 $f \in (L^p) =$ 於テ $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\nabla_n \cdot f - \nabla \cdot f\|_S = 0$ 。

従ッテ $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\frac{1}{k} \nabla_n \cdot f\|_S = \|\frac{1}{k} \nabla \cdot f\|_S$ ($k=1, 2, \dots$) ト

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\frac{1}{k} \nabla \cdot f\|_S = 0 = \exists \text{リ } (L^p) = \sum_{k=1}^{\infty} G_k,$$

$G_k = \{f \mid \|\frac{1}{k} \nabla_n \cdot f\|_S \leq \varepsilon; n=1, 2, \dots\}$ ト全テノ

$\varepsilon > 0$ = 對シテ 分解サレル。 ∇_n ノ連続性カラ 各 G_k ハ
 (L^p) ノ開集合。 然シテ (L^p) ハ完備距離空間デカラ、
或ル G_k ハ球ヲ含マネバナラナイ。即チアル 点 $f_0 \in (L^p)$
ト $\delta > 0$ が存在シテ $\sup_n \|\frac{1}{k} \nabla_n \cdot f\|_S \leq \varepsilon$ for $\|f - f_0\| \leq \delta$
トナラネバナラナイ。所ガ

$$\|\frac{1}{k} \nabla_n \cdot (f - f_0)\|_S \leq \|\frac{1}{k} \nabla_n \cdot f\|_S + \|\frac{1}{k} \nabla_n \cdot f_0\|_S,$$

$$\|\nabla_n \cdot (\frac{1}{k} f)\|_S = \|\frac{1}{k} \nabla_n \cdot f\|_S \text{ カカラ } n = \text{對シ一様} =$$

$$\lim_{\|f\| \rightarrow 0} \|\nabla_n \cdot f\|_S = 0. \text{ 故ニ } \nabla_n \cdot f \text{ ハ } f=0 \text{ へ連続且ツ}$$

$$\nabla \cdot 0 = 0. \text{ 然シテ } \|\tilde{T} \cdot f\|_S \leq 2 \|\nabla \cdot f\|_S,$$

$$|\|\tilde{T} \cdot f\|_S - \|\tilde{T} \cdot h\|_S| \leq \|\tilde{T} \cdot (f - h)\|_S \text{ カカラ } \tilde{T} \cdot f \text{ ハ}$$

各 $f \in (L^p)$ に連続である。以上

定理 1 の証 (1) と (4) とより $g =$ 對して *mean ergodic theorem* (6) が使へる。故に

$$\left\{ \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n g^{(m)} \right\} \wedge g^* = \text{強收斂} \Rightarrow g^* = T \cdot g^*,$$

$$g = g^* + (g - g^*) \text{ と置くと } g^{(n)} = g^* + (g - g^*)^{(n)}.$$

$$\left\{ \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n (g - g^*)^{(m)} \right\} \text{ が } 0 = \text{強收斂スル} \Rightarrow \text{カ} \text{ラ, (5)}$$

ヲ云フニハ

$$(8) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n (g - g^*)^{(m)} \text{ が almost every-}$$

where = 存在スルコトヲ云ヘバヨイ。所が $\left\{ \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n g^{(m)} \right\}$
 g^* へノ強收斂カラ

$$(9) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \left\| (g - g^*) - (E - T) \cdot \frac{mg + (m-1)g^{(1)} + \dots + g^{(m-1)}}{m} \right\| = 0 \quad 1)$$

(3) = ヨリ

$$(10) \quad \widetilde{T} \cdot \left\{ (E - T) \frac{mg + (m-1)g^{(1)} + \dots + g^{(m-1)}}{m} \right\} = 0$$

($m = 1, 2, \dots$)

カカラ, (9), (10) と Lemma = ヨリ $\widetilde{T} \cdot (g - g^*) = 0$ 即
 ち (8) が得ラレタ。

定理 2 の証 (1)' = ヨリ (3), (4) が全テノ $g \in (L^p) \cdot (M)$
 = 對して成リ立ツ。從ツテ定理 1 = ヨリ (5) が全テノ $g \in (L^p) \cdot$
 (M) = 對して成立ツ。所が (M) の norm $\| \cdot \|$ の意味で (L^p)

1) E の單位寫像

dense なるカラ Lemma = ヨリ, (5) が全て $g \in (L^p)$
 = 對シテ成立ツ, mean ergodic theorem (6) 1 方
 ハ (4) が $g \in (L^p) \cdot (M) =$ 對シテ成立ツコトト, (M) が
 (L^p) テ dense ナコトカラ出ル。

定理 3 / 証 (7) = ヨリ (1) / 満足サレテルコトが
 7 カル (Banach / 定理!). 又 (7) = ヨリ (2), (3), (4)
 全て / $g \in (L^p) =$ 對シテ満足サレテルカラ, 定理 1 =
 ヨリ, 定理 3 得ル. 証了。

Birkhoff - Khintchine / 定理ヲ定理 2 ヨリ
 導クコト

$P \equiv (0, 1)$ / $(0, 1) \rightarrow$ one-to-one¹⁾ 且ツ equi-
 measure 点変換トセヨ. $f \in (L^p) =$ 對シ $f^{(1)}, f^{(2)}(t)$
 $= f(P \cdot t)$ ヲ對應サセル線型寫像 T ヲ考ヘル. T が
 (1), (1)', (4) ヲ満足シテアルコトハ明カデアル. 又
 N. Wiener²⁾ = ヨレバ non-negative ナ函数
 $f(t) \in (L^p) =$ 對シ

$$(10) \quad \begin{cases} \text{mes} \left(\bigcup_t \{ \overline{f(t)} > \alpha \} \right) \leq \frac{1}{\alpha} \int_0^1 f(t) dt, \\ \overline{f(t)} = \sup_n \left\{ \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n f^{(m)}(t) \right\}, \\ \alpha > 0 \text{ ナ任意常数.} \end{cases}$$

故 = (2) = 亦満足サレテル. 故 = 定理 2 = ヨリ 全て /

1) measure 0 ヲ除イテ one-to-one

2) Duke Math. J. 5 (1939), 1-18.

$f \in (L^p) =$ 對シ (3), (5), (6) が成立ツ。之レデ B-K ergodic theorem が得ラレヌ。

[注意] 角谷氏 = ヨレバ, equi-measure 点変換ノ場合ハ次ノ如クシテ, non-negative $f \in (L^p)$ = 對シ (3)ノ成立ツコトが云ヘル。從ツテ定理1ヨリ直接 B-K ergodic theorem が得ラレヌ。

$$E_m^n(\alpha) = E_t \left(m\alpha \leq g^{(n)}(t) < (m+1)\alpha \right), (n=1, 2,$$

-----) トラレバ

$$E_{k, l; m}(\alpha) = E_t \left(\alpha \leq \frac{g^{(n)}(t)}{n} < (m+1)\alpha; n=k,$$

$$k+1, \dots, l \right) \leq \sum_{n=k}^l \sum_{i=n}^{\infty} E_i^{(n)}(\alpha).$$

E が equi-measure ナレバ $\text{mes}(E_i^{(n)}(\alpha))$ ハ $n =$ 無關係。ヨツテ

$$\begin{aligned} \text{mes}(E_{k, l; m}(\alpha)) &\leq \sum_{n=k}^l \sum_{i=n}^{\infty} \text{mes}(E_i^{(n)}(\alpha)) \\ &\leq \sum_{j=k}^{\infty} j \text{mes}(E_j^{(1)}(\alpha)) \leq \frac{1}{\alpha} \int_{g^{(1)}(t) \geq k\alpha} g^{(1)}(t) dt \end{aligned}$$

$$\text{ヲ得ル。故ニ} \lim_{k \rightarrow \infty} \left(E \left(\left(\sup_{n \geq k} \frac{g^{(n)}(t)}{n} \right) \geq \alpha \right) \right) = 0 \quad \text{即チ}$$

(3) ハ証明サレヌ。

前談話 = 述べタ如ク Wiener ハ (10) ト mean ergodic theorem 〆 B-K ergodic theorem

ヲ証明シタ。我々ノ方法ハ、之ノ equi-measure ナイ
場合ヲモ含ムヤウナ, operator-theoretical ex-
tension ト云ヘルデアリマセウ。大体 almost every-
where ナ収斂ヲ問題トシテルノデスカラ operator \hat{T}
ヲ考ヘルノガ自然ナノデハアリマスマイカ。